www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,
ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ECOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1990
OPTION T.A.

MATHEMATIQUES DEUXIEME EPREUVE
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

NOTATIONS ET OBJECTIF DU PROBLEME

L'objet du problème est l'étude de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(t) = \lim_{p \to +\infty} \sum_{n=-p}^{p} \frac{1}{(t+2n\pi)^2 + 1} .$$

La deuxième partie propose de calculer F(t), pour tout t réel, en explicitant son développement en série de Fourier.

On montre dans la troisième partie que cette fonction F est développable en série entière dans l'intervalle $]-1,+1[$.

La partie I est consacrée à un calcul d'intégrale impropre utile pour la détermination des coefficients de Fourier de la fonction $t \mapsto F(t)$.

PARTIE I

On se propose de calculer explicitement la fonction φ définie sur $]0,+\infty[$ par $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x \cos u}{u^2 + x^2}\, du$ en établissant qu'elle est solution sur $]0,+\infty[$ d'une équation différentielle simple.

1. Existence et premières propriétés de φ

a) Prouver que l'intégrale impropre définissant $\varphi(x)$ est convergente, quel que soit le nombre x réel strictement positif.

b) Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{u^2 + x^2}\, du$ pour tout x réel strictement positif.

Prouver que la fonction φ est bornée par $\frac{\pi}{2}$.

c) Prouver que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2}\, du$ est convergente et que, pour tout x strictement positif, on a : $\left|\varphi(x) - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant x \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2}\, du$.

En déduire la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers zéro.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

I.2. Etude de la régularité de φ

Pour tout n entier strictement positif, on définit la fonction φ_n sur $]0,+\infty[$ par :

$$\varphi_n(x) = \int_0^n \frac{x \cos u}{u^2 + x^2}\, du .$$

a) Montrer que la suite des fonctions (φ_n), $n \in \mathbb{N}^*$, converge uniformément vers la fonction φ sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$.
En déduire que φ est continue sur $]0,+\infty[$.

b) Prouver que, pour tout entier n strictement positif, φ_n est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ les dérivées de φ_n s'exprimant encore par des intégrales.

Prouver ensuite que les suites (φ_n') et (φ_n''), $n \in \mathbb{N}^*$, convergent uniformément sur to $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$.

En déduire que φ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et préciser l'expression des dérivées φ' et φ'' à l'aide d'intégrales impropres.

I.3. Equation différentielle vérifiée par φ

a) Prouver que, pour tout couple (x,u) appartenant à $]0,+\infty[\times [0,+\infty[$,

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left[\frac{x}{u^2 + x^2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{x}{u^2 + x^2}\right] = 0 .$$

b) Déduire de la question précédente, par des intégrations par parties que l'on justifiera soigneusement, que, sur $]0,+\infty[$, φ est solution de l'équation différentielle (1) : $\varphi'' - \varphi = 0$.

I.4. Détermination de la fonction φ

a) Résoudre l'équation (1) sur $]0,+\infty[$.

b) En utilisant la question I.1., déterminer explicitement $\varphi(x)$ pour tout x strictemen positif.

c) Prouver que, pour tout x réel, l'intégrale impropre $\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{t^2 + 1}\, dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

PARTIE II

A l'aide des résultats de la première partie, on se propose de calculer explicitement la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(t) = \lim_{p \to +\infty} F_p(t) \quad \text{où :} \quad F_p(t) = \sum_{n=-p}^{+p} \frac{1}{(t+2n\pi)^2 + 1} .$$

On note alors $F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t+2n\pi)^2 + 1}$.

Tournez la page S.V.P.

.1. Existence de F(t) et premières propriétés

a) Prouver que, quel que soit t appartenant à $\mathbb{R}$, la suite $(F_p(t))$, $p \in \mathbb{N}^*$, est convergente.

b) Prouver que la fonction F est 2π-périodique et paire.

.2. Régularité de F

a) Prouver que la suite $(F_p)_{p\geq 0}$ est uniformément convergente sur tout intervalle [a,b] de $\mathbb{R}$.
En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Prouver que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c) Prouver enfin que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

.3. Calcul des coefficients de Fourier de F

a) Montrer que les coefficients de Fourier $c_k(F)$ de la fonction F vérifient, pour tout entier k de $\mathbb{Z}$, la relation : $c_k(F) = \frac{1}{\pi}\psi(k)$ où ψ est la fonction introduite dans la partie I .

b) Déterminer le développement en série de Fourier de F et en déduire la valeur explicite de F(t) pour tout nombre réel t .

c) Déterminer les sommes des séries numériques suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2\pi^2 + 1} \quad , \quad S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2(1+2n)^2 + 1} .$$

d) Déterminer la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{2\pi} (F(t))^2 \, dt$.

PARTIE III

Soit a un réel strictement positif donné ; soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} a - \cos x} .$$

Le but de cette partie est d'établir que g admet un développement en série entière dans un voisinage de 0 .

III.1. Dans cette question, la fonction g est supposée admettre un développement en série entière dans un voisinage de 0 .

a) Etablir que ce développement s'écrit : $g(x) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p x^{2p}$.

b) Calculer les coefficients b_0 , b_1 , b_2 .

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

c) En remarquant la relation, pour tout x du voisinage de 0 :

$$g(x) \cdot (\text{ch } a - \cos x) = 1 ,$$

établir une relation permettant d'exprimer b_n (n entier $n \geqslant 1$) en fonction de b_0 b_1 ,...., b_{n-1} .

d) Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence qu'il existe un plus petit ré ρ_o , ($\rho_o > 0$) tel que, pour tout entier naturel n :

$$|b_n| \leqslant \frac{(\rho_o)^{2n}}{(\text{ch } a - 1)^{n+1}} .$$

Préciser ρ_o . En déduire un minorant du rayon de convergence R de la série entièr $b_p x^{2p}$.

III.2.a) Déterminer tous les nombres complexes z tels que ch a = cos z .

b) Soit S(z) la somme de la série entière de terme général $b_p z^{2p}$ de rayon de convergence R :

$$S(z) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p z^{2p} .$$

Démontrer, pour tout nombre complexe z de module majoré par R, la relation :

$$S(z) \ (\text{ch } a - \cos z) = 1 .$$

En déduire un majorant du rayon de convergence R .

c) Démontrer que la fonction g admet un développement en série entière dans un voisinage de 0 .

III.3. Démontrer que la fonction $t \mapsto F(t)$ définie à la deuxième partie est développable en série entière dans un voisinage de 0 .

FIN DU PROBLEME

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail